Líneas Características

David Miguel Muñoz García

Octubre 2019

Las líneas características son curvas que permiten obtener información del flujo en particular y en general estas dependen tanto del tiempo como de la posición, en un campo de velocidades no estacionario cada curva es diferente.

Consideremos un campo de velocidades $\vec{u} = u_i(x, y, z, t)\hat{e}_i$, X_i las coordenadas materiales y x_i coordenadas espaciales.

1 Lineas de Corriente, Streamlines

Las líneas de corriente son curvas cuya tangente es paralela al campo de velocidades en cada instante. La ecuación diferencial que debe satisfacer es:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = ds$$

2 Trayectoria, Sendas, Pathlines

Las trayectorias (particle paths) describen la posición de la partícula en cada tiempo t, desde un punto de vista del laboratorio que sigue a la partícula material a lo largo del tiempo. La ecuación diferencial que la describe es:

$$\frac{Dx_i}{Dt} = v_i(x_i, t)$$

sujeto a las condiciones iniciales $x_i(X_i, T) = X_i$

3 Trazas, Streaklines

La traza se considera a todas las partículas que han pasado por determinado punto. Para encontrar la traza se resuelve la ecuación diferencial de la Senda (sección(2)) con la condición $\vec{x} = \vec{x}_o$ en el tiempo $\tau < t$ y después se deja que τ recorra todos su valores anteriores al tiempo t con este último fijo.

En general, estos 3 tipos de lineas características son diferentes y coinciden para flujo estacionario (no dependiente del tiempo).

4 Líneas de vórticidad[2]

Las líneas de vorticidad son las líneas que son tangentes a la vorticidad en cada uno de los puntos. La ecuación diferencial de las líneas vorticales es:

$$d\vec{r} \times \vec{\Omega}(x_i, t) = 0$$

Donde $\vec{\Omega}(x_i, t)$ es la vorticidad.

5 Flujo dependiente del tiempo

Como ejemplo para esta sección se toma al siguiente campo de velocidades

$$u_x = \alpha x(1 + 2\beta t)$$
$$u_y = \alpha y$$
$$u_z = 0$$

Con α, β [=] Hz

(a) Líneas de Corriente

En este caso se encontrarán las líneas características en un caso de flujo no estacionario y mostrar que corresponden a curvas diferentes a un tiempo dado.

Consideremos el sistema

$$u_x = \alpha x(1 + 2\beta t)$$
$$u_y = \alpha y$$
$$u_z = 0$$

En general se debe resolver

$$\frac{dx_i}{ds} = u_i(t, s)$$

lo que da como resultado para cada caso

$$\frac{dx}{ds} = \alpha x(1 + 2\beta t) \Rightarrow x = x_o e^{\alpha(1+2bt)s}$$
$$\frac{dy}{ds} = \alpha y \Rightarrow y = y_o e^{\alpha s}$$

Se debe eliminar el parámetro s para obtener una expresión para la función, de esta manera, la función que representa las lineas de corriente dependientes del tiempo es:

$$\frac{x}{x_o} = \left(\frac{y}{y_o}\right)^{1+2\beta t}$$

(b) Sendas

Las ecuaciones que se deben resolver son:

$$\frac{dx}{dt} = u_i(t)$$

Para este caso en particular resultan

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1 + 2\beta t)$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

Cuyos resultados son:

$$x(t) = x_o e^{\alpha t(1+\beta t)}$$
$$y(t) = y_o e^{\alpha t}$$

Eliminando el tiempo de las expresiones

$$\frac{x}{x_o} = \left(\frac{y}{y_o}\right)^{1+\frac{\beta}{\alpha}ln\left(\frac{y}{y_o}\right)}$$

(c) Trazas, Streaklines

El punto de inicio es el sistema de ecuaciones diferenciales para las Sendas que se obtuvieron en (b)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1 + 2\beta t)$$
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

Cuyo resultado integrando de τat

$$x(t) = x_o e^{\alpha t(1+\beta t) - \alpha\tau(1+\beta\tau)}$$
$$y(t) = y_o e^{\alpha t - \alpha\tau}$$

Debemos recordar que una condición es $\tau < t$ para un t dado.

Bibliografía

[1] Currie, I. G., Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw - Hill, Tercera Edición.

[2] Piña Garza, Eduardo, De la Selva Monroy, Sara M. T., Dinámica de Fluidos, Trillas, Primera Edición.

[3] Velasco Belmont, Rosa María, Introducción a la Hidrodinámica Clásica, Fondo de Cultura Económica, Primera edición.